Matemática Discreta I Segundo parcial	1^{er} Apellido: ____________ 2^{o} Apellido: ____________	12 de enero de 2018 Tiempo 2 h.
Dpto. Matematica Aplicada TIC ETS Ingenieros Informáticos Universidad Politécnica de Madrid	Nombre: ____________ Número de matrícula:	**Nota:**

Ejercicio 1 (20 puntos)

a) En $\mathbb{Z}_{323}$, calcula: $[3]^{2018} + [7]^{-1}[2]$.

b) Razona si el siguiente sistema de congruencias tiene solución, y en caso afirmativo, resuélvelo.

$$\begin{cases} 6x \equiv 10 \pmod{16} \\ 7x \equiv 5 \pmod{12} \\ 2x \equiv 1 \pmod{33} \end{cases}$$

Solución:

a) $\phi(323) = \phi(17) \cdot \phi(19) = 288$

$[3]^{2018} = ([3]^{288})^7 \cdot [3]^2 = [3]^2 = [9]$

$[7]^{-1} = [277]$

Finalmente, $[3]^{2018} + [7]^{-1}[2] = [9 + 277 \cdot 2] = [563] = [240]_{323}$

b) $\begin{cases} 6x \equiv 10 \pmod{16} \\ 7x \equiv 5 \pmod{12} \\ 2x \equiv 1 \pmod{33} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod{8} \\ x \equiv 35 \pmod{12} \\ x \equiv 17 \pmod{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 15 \pmod{8} \\ x \equiv 11 \pmod{12} \\ x \equiv 17 \pmod{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 7 \pmod{2^3} \\ \cancel{x \equiv 11} \pmod{2^2} \\ x \equiv 11 \pmod{3} \\ \cancel{x \equiv 17} \pmod{3} \\ x \equiv 17 \pmod{11} \end{cases}$$

El sistema tiene solución puesto que $mcd(8, 12)|15 - 11$, $mcd(8, 33)|15 - 17$, y $mcd(12, 33)|11 - 17$.

$x = 7 \cdot (33) \cdot (33)_8^{-1} + 2 \cdot (88) \cdot (88)_3^{-1} + 6 \cdot (24) \cdot (24)_{11}^{-1} + 264t = 231 \cdot 1 + 176 \cdot 1 + 144 \cdot 6 + 264t = [215]_{264}$

Ejercicio 2 (10 puntos)

María tiene 5 entradas para el cine, y quiere repartir 4 entre sus amigos: Luis, Juan, Ángel, Ricardo, Ana, Marta, Isabel, Andrea y Lorena.

a) ¿De cuántas formas puede hacerlo?

b) ¿Y si quiere ir con dos chicos y dos chicas?

c) Sabe que Ricardo y Ana no se llevan bien, por lo que no pueden ir juntos. ¿De cuántas formas puede repartir las entradas de forma que no les dé a los dos?

d) Siempre que va Juan al cine, va acompañado de Marta o de Lorena. ¿Cómo puede repartir entonces las entradas?

Finalmente, van al cine María, Luis, Ricardo, Isabel y Lorena.

e) ¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila de 10 butacas, de forma que estén seguidos?

f) ¿De cuántas formas se pueden sentar un una fila de 5 butacas, de forma que Luis y Ricardo no estén juntos?

Solución:

a) $\binom{9}{4}$

b) $\binom{4}{2}\binom{5}{2}$

c) $\binom{9}{4} - \binom{7}{2}$

d) Si no va Juan $\binom{8}{4}$, si va Juan, $\binom{7}{2} + \binom{7}{2} - \binom{6}{1}$. Por tanto $\binom{8}{4} + 2\binom{7}{2} - \binom{6}{1}$

e) $6P_5$

f) $CR_{3,2} \cdot 2! \cdot 3!$

Ejercicio 3 (10 puntos)

El tío John quiere repartir 16 pasteles iguales entre sus cuatro sobrinos Jimmy, Bob, Peter y Robert.

a) ¿De cuántas formas puede hacerlo, si quiere dar a cada uno como mínimo 2 pasteles?

b) De repente se da cuenta de que Bob es demasiado pequeño y no debe tomar más de 3 pasteles, y Robert tiene picadas las muelas, por lo que no debe de tomar más de 5. ¿De cuántas formas puede repartir los 16 pasteles teniendo en cuenta estas condiciones y que cada uno debe de recibir al menos 2 pasteles?

Solución:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ x_i \geq 2, i \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$ $\qquad CR_{4,8}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ x_i \geq 2, i \in \{1,2,3,4\}, x_2 \leq 3, x_4 \leq 5 \end{cases}$ $\qquad CR_{4,8} - (CR_{4,6} + CR_{4,4} - CR_{4,2})$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Resuelve la siguiente relación de recurrencia lineal no homogénea:

$$\begin{cases} a_n = 9a_{n-2} + 4(-3)^n, & \forall n \geq 2 \\ a_0 = 2, a_1 = 3 \end{cases}$$

Solución:

Solución homogénea: $S(n) = A \cdot 3^n + B \cdot (-3)^n$

Solución completa: $a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-3)^n + 2n(-3)^n$

Ejercicio 5 (5 puntos)

Sean n rectas trazadas en el plano de forma que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes. Para cada $n \geq 1$, sea a_n el número de regiones acotadas del plano que determinan las n rectas. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n.

Solución:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-2), & \forall n \geq 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$